In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful

LA FACULTÉ

SEEK KNOWLEDGE

Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects copyrights-free medical documents for non-lucratif use.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for some content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all the authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.

Chapitre 3 : Calcul de probabilités

I/ Expériences et évènements aléatoires :

1/ Phénomènes aléatoires :

On appelle expérience aléatoire, notée $\mathcal{E}$, une expérience dont les résultats possibles dépendent du hasard.

Un résultat possible de l'expérience est appelé "issue" ou "éventualité", notée par ω. L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé "espace fondamental", noté $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

ex :

1/ $\mathcal{E}$ = "jet de pièce", $\Omega = \{P, F\}$ P : pile, F : face

2/ $\mathcal{E}$ = "jet d'un dé", $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

P, F, 1, 2 ..., 6 sont des éventualités ou évènements élémentaires.

Card. Ω = nbre d'éléments de Ω,

card. Ω fini.

3/ $\mathcal{E}$ = "on jette un dé jusqu'à obtenir 1" = "nbre de jets jusqu'à l'obtention de 1", $\Omega = \{1,2,3,\dots\}$ → Infini dénombrable.

4/ $\mathcal{E}$ = "durée de vie d'une ampoule électrique". $\Omega = [0, +\infty[$

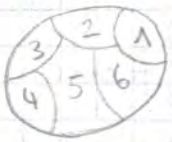
2/ Évènements aléatoires :

Évènement = sous-ensemble de Ω (noté par : A, B, C ...).

L'ensemble de tous les évènements s'appelle "algèbre des évènements", notée $\mathcal{A}$.

ex : 1/ $\mathcal{E}$ = "lancé de dé".

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.



ϕ = évènement impossible = événement qui ne se réalise jamais.

Ω = évènement certain.

$A = \{2,4,6\}$ = "obtenir un nbre pair"

$B = \{1,3,5\}$ = " " " " impair".

$C = \{2,4\}$ = "obtenir 2 ou 4".

$D = \{8\} = \phi$.

$E = \{6\}$

$\{\} \to C_6^0 = 1$.

$\{\cdot\} \to C_6^1 = 6$.

$\{\cdot,\cdot\} \to C_6^2 = 15$

$\{\cdot,\cdot,\cdot\} \to C_6^3 = 20$

$\{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\} \to C_6^4 = 15$

$\{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\} \to C_6^5 = 6$.

$\{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\} \to C_6^6 = 1$.

} A a 64 évènements

2/ $\mathcal{E}$ = "Lancé d'une pièce".

$\Omega = \{P, F\} \rightrightarrows \{P\}$ ou $\{F\}$ ou ϕ } A a 4 évènements

Sur: www.la-faculte.net Espace E-learning pour apprentissage gratuit online Pour utilisation Non-lucrative

Card $\Omega = 6 \rightarrow$ card $\mathcal{A} = 64$.

Card $\Omega = 2 \rightarrow$ card $\mathcal{A} = 4$.

Card $\mathcal{A} = 2^{\text{card}\,\Omega}$

- Les évènements aléatoires étant des ensembles, on peut effectuer les opérations logiques habituelles.
- On définit l'évènement $\bar{A}$ comme étant le contraire de $\mathcal{A}$. Il est réalisé quand $\mathcal{A}$ n'est pas réalisé.

$$\bar{\Phi} = \Omega \quad , \quad \bar{\Omega} = \Phi.$$

- L'évènement $A \cap B$ (A inter B) est équivalent à dire A et B sont réalisés
- L'évènement $A \cup B$ (A union B) est équivalent à dire A ou B sont réalisés.

ex: 1/ $A = \bar{B}$, $B = \bar{A}$.

$A \cap B = \Phi$ $A \cap C = \{2,4\}$.

$A \cup B = \Omega$ $E \cup C = \{2,4,6\}$

- Si $A \subset B$, la réalisation de $A \Rightarrow$ la réalisation de B.
- Si $A \cap B = \Phi$, A et B sont incompatible (Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps)

Relations de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Probabilités sur un espace fini:

card $\Omega = N$.

card $\mathcal{A} = n$,

Probabilité de A = Prob(A) = $P(A) = \frac{n}{N}$

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{|\mathcal{A}|}{|\Omega|}$$

II/ Probabilités:

1/ Déf: intuitive:

On cherche à définir pour un évènement (A) la vraisemblance (chance) qu'on accorde à un évènement à priori (avant l'éxperience) pour qu'il se réalise.

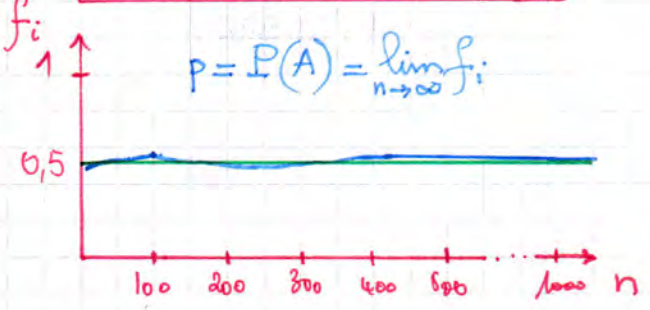
On cherche donc à associer à un évènement un nombre: $p = P(A)$

$0 < p < 1$ qui représente la chance que cet évènement se réalise.

ex: Experience $\mathcal{E}$ = "lancer une pièce de monnaie n fois".

A: "avoir pile".

n	10	100	500	...	1000
n_i	4	52	.	...	502
$f_i = \frac{n_i}{n}$	4/10	52/100	/500	...	502/1000



facadm16@gmail.com Participez à "Q&R rapide" pour mieux préparer vos examens 2017/2018

2/ Déf. axiomatique:

Soit $\mathcal{E}$ expérience aléatoire d'espace fondamental Ω. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des évènements. La probabilité "P" est une application qui va de l'algèbre des évènements:

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0;1].$$

$$A \longrightarrow P(A) = p \text{ tel que: } 0 \leq p \leq 1$$

i/ $P(\Omega) = 1$

ii/ $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3/ Propriétés:

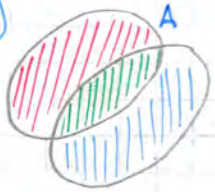
i/ $P(\Omega) = 1$

ii/ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $\left(\emptyset = \bar{\Omega}, P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0\right)$

iii/ si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

iv/ $P(A \setminus B) = P(A \text{ moins } B) = P(A \cap \bar{B})$

$= P(A) - P(A \cap B)$



/// $A \cap \bar{B}$

/// $B \cap \bar{A} = B \setminus A$

/// $A \cap B$

$$P(B \setminus A) = P(B \text{ moins } A) = P(B \cap \bar{A})$$

$$= P(B) - P(B \cap A).$$

v/ $P(A \cup B) = +[P(A) + P(B)] - [P(A \cap B)]$

$$P(A \cup B \cup C) = +[P(A) + P(B) + P(C)] - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + [P(A \cap B \cap C)].$$

4/ Cas particulier:

Cas particulier d'équiprobabilité:

Déf.: 2 évé. sont dits équiprobables A et B si et seulement si $\Leftrightarrow$

$$P(A) = P(B).$$

ex: $\mathcal{E} \rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$

équiprob. $\Leftrightarrow P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}) \quad \forall i, j = 1, \ldots, N.$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{N}$$

En effet, on a $\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_N\}$ et $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset \quad \forall i \neq j.$

i/ $1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_N\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots + P(\{\omega_N\})$

ii/ $1 = N P(\{\omega_1\}) \rightarrow P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{N}$

Probabilité d'un événement:

Soit A un évènement $A \subset \Omega$.

$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\} \quad n \leq N.$

$$P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots + P(\{\omega_n\}) = n P(\{\omega_1\}) = n \frac{1}{N} = \frac{n}{N} = \frac{|A|}{|N|}.$$

$$P(A) = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles.}}$$

N.B.: En calcul de probabilités:

→ Tirage successif sans remise quand l'ordre n'est pas défini ≡ tirage simultané.

Att.: B = avoir 1N2B dans cet ordre : $P(B) = \frac{A_4^1 \, A_6^2}{A_{10}^3}$

Soit $\mathcal{E}$ l'espace fondamental Ω, et soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des évènements le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace de prob. où $p = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|}$.

III/ Probabilités conditionnelles:

Une information supplémentaire concernant l'expérience modifie la vraisemblance (chance) que l'on accorde à l'événement étudié.

1/a/ Déf. axiomatique:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de proba. La proba de A conditionnellement à B, notée : $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ est une application $P_B : \mathcal{A} \to [0;1]$, $A \to P_B(A)$.

tel que alors :

i/ $P_B(\Omega) = 1$

ii/ $\forall A, C \in \mathcal{A}$ $A \cap C = \Phi$

iii/ $P(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C)$

N.B.: la proba. conditionnelle étant une mesure de proba alors elle vérifia toutes les propriétés énoncées pour une proba. simple.

Déf(2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de proba.

Soient A et B 2 événements :

$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

La prob de A sachant B est un nbre n d'événements:

$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

P (A sachant B) : A/B

P (A moins B) : $A \setminus B$

N.B.: Sachant, si, chez, parmi... etc (synonymes de "sachant") → conditionnel

Cas particulier d'équiprobabilités:

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

ex: $\mathcal{E}$ = "lancé de 2 dés".

A = "le 1er donne le 1."

B = "la somme des 2 faces ≤ 4"

$P(A/B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$ $|B| = 6$

$A \cap B = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ $|A \cap B| = 3$

$$P(A/B) = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2/ Axiome des propabilités composées :

≡ Probabilités de l'∩ :

i/ 2 événements A, B tq $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$

$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B) = P(B/A)\,P(A).$$

ii/ A,B,C $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ et $P(C)\neq 0$.

$$P(\underbrace{A\cap B}_{D}\cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A\cap B).$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(D\cap C) = P(C/D)\,P(D)$$
$$= P(C/A\cap B).P(B/A)\,P(A).$$

$A\cap B = A\bullet B$

iii/ Soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ tq $P(A_i)\neq 0$ $\forall i=1,\dots,n$

$$P(A_1\bullet A_2\bullet\dots\bullet A_{n-1}\bullet A_n) = P(A_1)\times P(A_2/A_1)$$
$$\times P(A_3/A_1\bullet A_2)\times\dots$$
$$\times P(A_n/A_1\bullet A_2\dots\bullet A_{n-1})$$

ex : Groupe de 5 étudiants → 3 Filles, → 2 Garçons

on choisit 3 étudiants.

A = "la 1ère choisie est une F, le 2e 1G, la 3e 1F".

F_i : "choisi une fille à la $i^{ème}$ position" $i=1,2,3$

G_i : " " un garçon " "

$A = F_1\cap G_2\cap F_3$.

$$P(A) = P(F_1\cap G_2\cap F_3) = P(F_1)\times P(G_2/F_1)$$
$$\times P(F_3/F_1\cap G_2).$$

$$P(F_1) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{3}{5} = P(F)$$

1 ← |F|G| 1er tirage, 3 2, 5

$$P(G_2/F_1) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = P(G).$$

1 ← |F|G| 2e tirage, 3-1 2, 5-1

$$P(F_3/F_1\cap G_2) = P(F) = \frac{2}{3}$$

1 ← |F|G| 3e tirage, 2 2-1, 5-2

3/ Indépendance :

a/ Déf 1 :

A est indépendant de B si :

$$P(A/B) = P(A)$$

B est indépendant de A si :

$$P(B/A) = P(B).$$

A et B sont indépendants si :

$$P(A/B) = P(A) \text{ ou } P(B/A) = P(B).$$

b/ Déf 2 :

A et B sont idépendants si :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B).$$

$$P(A\cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$$
$$= P(A).P(B) = P(B).P(A).$$

Attention : $A\cap B = \Phi \not\Leftrightarrow$ A et B indépendan

$\Updownarrow$

A et B incompatibles.

b/ Indépendance mutuelle :

Soit 3 événements A, B, C tq $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ et $P(C)\neq 0$.

A, B, C sont mutuellement indépendants

$\Updownarrow$

i/
$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)\times P(B).\\ P(A\cap C) &= P(A)\times P(C).\\ P(B\cap C) &= P(B)\times P(C).\end{aligned}\right\}\text{ indépendants 2 à 2}$$

iii/ $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

N.B.: Indépendants mutuellement $\Rightarrow$ indépendants 2à2

$\not\Leftarrow$

c/ Propriétés:

Soit A et B 2 événements indépendants

$\Rightarrow$ $\bar{A}$ et B sont indépendants.

$\bar{B}$ et A sont indépendants.

$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

N. B.:

i/ A et B indépendants $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\bar{A}$ et B indépendants.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \overset{?}{\Rightarrow} P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$.

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

$= P(B) - P(A) \cdot P(B)$. (indépendants)

$= P(B)[1 - P(A)]$.

$= P(B) \cdot P(\bar{A})$.

IV/ Théorème de Bayes:

1/ Formule des probabilités totales:

$E \rightarrow \Omega$

$(B_i)_{i=1,\dots,n}$ système complet de Ω

C'est à dire: $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j \quad i = 1, \dots n. \quad j = 1, \dots n.$

Soit A un événement.

$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)$.

ex: $n = 2 \quad \Omega = B_1 \cup B_2, \ B_1 \cap B_2 = \phi$

$A \subset \Omega \Rightarrow A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2)$.

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$.

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) - P[(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2)]$ ($= \phi$)

$= P(A/B_1) \times P(B_1) + P(A/B_2) \times P(B_2)$

2/ Théorème de Bayes:

Sous les mêmes conditions précédemment (que la formule des probabilités totales).

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \times P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) P(B_i)} \quad \forall i = 1, \dots n.$$

Démonstration:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i) \times P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

Exercices:

Ex 1o:

H: "être un homme".

F: "être une femme".

D: "être un diabétique".

$P(H) = 0{,}48. \quad P(F) = 1 - P(H)$.

/ = sachant, conditionnellement, on suppose, si, chez, parmi, alors que

$P(D/H) = 0{,}13$.

$P(D/F) = 0{,}12$.

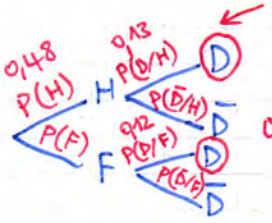
$P(D) = ?$

$D = (D \cap H) \cup (D \cap F)$.

1/ E = "choisir une personne".

$\Omega = \{F, H\} \quad F \cap H = \phi$

$P(D) = P(D/H) \ P(H) + P(D/F) \cdot \underbrace{P(F)}_{[1 - P(H)]}$.



ou

$$P(D) = P(D/H) \times P(H) + P(D/F) \times P(F).$$

La Σ de toutes les branches partant d'un même point = 1.

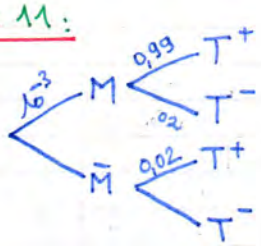
2/ $P(H/D) = P(D \cap H) / P(D)$.

$= \dfrac{P(D/H) \cdot P(H)}{P(D)}$.

3/ $P(F/\bar{D}) = [P(\bar{D}/F) \cdot P(F)] / P(\bar{D})$.

$= [[1 - P(D/F)] \cdot P(F)] / [1 - P(D)]$

Ex 11:



$P(\bar{T}^+/M) = 0,99$

$P(T^+/\bar{M}) = 0,02$

$P(M) = 1/1000 = \dfrac{|M|}{|\Omega|}$.

$P(M/T^+) = ?$

$= \dfrac{P(T^+/M) \cdot P(M)}{P(T^+)}$.

$= \dfrac{P(T^+/M) \cdot P(M)}{P(T^+/M) P(M) + P(T^+/\bar{M}) P(\bar{M})}$

Application en Médecine:

Aide au diagnostic et à la thérapeutique

M: maladie, S: symptome.
S^+: « positif S^-: « négatif

∃ lien réciproque entre M et S.

$M \rightarrow S$ (pas tout le temps) $S \rightarrow M$ (pas tout le temps)

Paramètres d'évaluation:

- Prévalence: $P(M) = p$.
- Sensibilité du test: $Se = P(S^+/M) \simeq 1$
- Spécificité: $Sp = P(S^-/M^-) \simeq 1$.

Un test idéal serait celui pour lequel $Se = Sp = 1$ (ne jamais se tromper).

Si $Se \simeq 1$. $Se = 0,95$.

$Se = P(S^+/M) = 0,95$.

$1 - Se = P(S^-/M) = 0,05$

Un test avec une bonne Se conduit à un résultat⁺ chez presque tous les malades. On l'utilise pour le dépistage.

Si $Sp \simeq 1$ $Sp = 0,95$

$Sp = P(S^-/\bar{M}) = 0,95$.

$1 - Sp = (S^+/\bar{M}) = 0,05$.

Un test avec une bonne Sp conduit à un résultat⁻ chez presque tous les non-malades

Il est utilisé pour confirmer un examen.

Sur: www.la-faculte.net Espace E-learning pour apprentissage gratuit online Pour utilisation Non-lucrative

Relation entre Sp et Se:

Un test peut avoir une bonne se et une bonne sp. On pose:

$$k = Se/(1-Sp).$$

Ce rapport est appelé: "rapport de vraisemblance".

$$k = \frac{P(S^+/M)}{1-P(S^-/\bar{M})} = \frac{P(S^+/M)}{P(S^+/\bar{M})}$$

$$\Rightarrow P(S^+/M) = k.P(S^+/\bar{M}).$$

Le sujet à k fois plus de chance d'avoir un s^+ s'il est malade que s'il n'est pas malade.

Le calcul de ces paramètres:

Ces paramètres sont calculés à partir d'un tableau de contingence: Une expérience est menée sur un éch. de taille N, représentatif de la pop. à laquelle le test est appliqué.

Symptôme	Maladie M	Maladie $\bar{M}$	Totaux
S^+	VP	FP	VP+FP = $\lvert S^+\rvert$
S^-	FN	VN	FN+VN = $\lvert S^-\rvert$
Totaux	VP+FN = $\lvert M\rvert$	FP+VN = $\lvert\bar{M}\rvert$	N

V: vrai. p: +
F: faux N: −

$$p = P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{VP+FN}{N}$$

$$se = P(S^+/M) = \frac{|S^+ \cap M|}{|M|} = \frac{VP}{VP+FN}$$

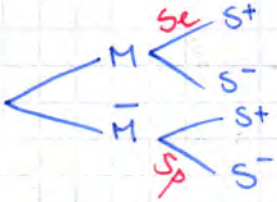
$$Sp = P(S^-/\bar{M}) = \frac{|S^- \cap \bar{M}|}{|\bar{M}|} = \frac{VN}{FP+VN}$$

Elements de décision pour un médecin:

$P(M/S^+)$

Un médecin serait plus interessé de connaître $P(M/S^+)$ et $P(\bar{M}/S^-)$.

Valeur prédictive positive VPP = $P(M/S^+)$.
" " négative VPN = $P(\bar{M}/S^-)$.



$$VPP = \frac{Se \times p}{Se \times p + (1-Sp)(1-p)}$$

$$VPN = \frac{Sp \times (1-p)}{Sp(1-p) + (1-Se) \times p}.$$

facadm16@gmail.com Participez à "Q&R rapide" pour mieux préparer vos examens 2017/2018